MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 5
20.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Wir verwenden i.f. aus Lemma 3.5 (nur), daß $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$ (siehe 3.5f), sowie $(x^{-1})^{-1} = x$ (siehe 3.5b).

   a) Es ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{Def.}}{=} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} \overset{3.5f)}{=} (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad \checkmark$$

   b) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &\overset{\text{Def.}}{=} \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} \overset{\text{Def.}}{=} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} \overset{3.5f)}{=} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1}) \\ &\overset{3.5b)}{=} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) \overset{3.5f)}{=} (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)^{-1} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

   Etwas kürzer geht es, wenn wir aus 3.5f) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$ und a) verwenden:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} \overset{3.5f)}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \overset{\text{a)}}{=} \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \checkmark$$

2. a) Hier ist die Grundmenge $G = \mathbb{Q}$ und die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$. Gesucht ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\} \;\middle|\; \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} \right\}.$$

   Es ist für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x^2(x+1) - (x+1)^2 = 2x(x+1)^2 - 3x^2 && \text{(x aus dem Nenner)} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 1 = 2x(x^2 + 2x + 1) - 3x^2 && \text{(ausmultiplizieren, binomische Formel)} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3x^2 && \text{(ausmultiplizieren)} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + x^2 + 2x && \text{(zusammenfassen)} \\ \Longleftrightarrow \quad & -4x = 1 && \text{(alle x auf eine Seite)} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Da $x = -\frac{1}{4}$ auch tatsächlich in $\mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$ liegt, ist damit $L = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$.

b) Wir formen die Gleichung folgendermaßen um, wobei wir zwei Faustregeln anwenden, die sich bewährt haben:

- Tritt in einer Gleichung *eine* Wurzel auf, so versuchen wir sie (bevor wir ans Quadrieren gehen) auf einer Seite der Gleichung zu isolieren, also die Gleichung in die Form „$\sqrt{\text{krims}} = \text{krams}$“ zu bringen. **(Wichtig!)**
- Treten in einer Gleichung *zwei* Wurzeln auf, versuchen wir sie vor dem Quadrieren auf *verschiedene* Seiten der Gleichung zu bringen.

(Man probiere aus, was passiert, wenn man diese Faustregeln nicht beachtet: Die zweite Faustregel erspart nur gelegentlich einige Multiplikationen und ist eher Geschmackssache; die erste dagegen verhindert Katastrophen!)

Es ist für $x \in [-2, 7]$

$$
\begin{array}{rll}
 & \sqrt{5x+10} - \sqrt{7-x} = 3 & \\
\iff & \sqrt{5x+10} = 3 + \sqrt{7-x} & \text{(zweite Faustregel)} \\
(!!) \quad \Longrightarrow & 5x + 10 = (3 + \sqrt{7-x})^2 & \text{(quadrieren)} \\
\iff & 5x + 10 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7-x} + 7 - x & \text{(binomische Formel)} \\
\iff & 5x + 10 = 16 - x + 6 \cdot \sqrt{7-x} & \\
\iff & 6x - 6 = 6 \cdot \sqrt{7-x} & \\
\iff & x - 1 = \sqrt{7-x} & \text{(erste Faustregel)} \\
(!!) \quad \Longrightarrow & (x-1)^2 = 7 - x & \text{(erneut quadrieren)} \\
\iff & x^2 - 2x + 1 = 7 - x & \text{(binomische Formel)} \\
\iff & x^2 - x - 6 = 0. & \text{(alle } x \text{ auf eine Seite)}
\end{array}
$$

Wie man solche quadratischen Gleichungen lösen kann, wissen wir aus der Schule (oder von Übungsblatt 4/ Aufgabe 4); es ist $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, also sind die Lösungen hier 3 und -2.

Damit sind wir aber noch nicht fertig. Denn zum einen wissen wir (da in unserer Umformungskette auch Implikationspfeile $\Longrightarrow$ statt ausschließlich Äquivalenzpfeilen $\iff$ vorkamen) nur: *Wenn* x eine Lösung der Ausgangsgleichung ist, *dann* ist $x \in \{3, -2\}$; anders gesagt: 3 und -2 sind die einzigen *möglichen* Lösungen, bzw. *nur* $x = 3$ oder $x = -2$ kommen als Lösungen *in Frage*. Außerdem ist zu prüfen, ob die Lösungen überhaupt im Intervall $[-2, 7]$ liegen, wie in der Aufgabenstellung gefordert.

Letzteres ist für beide Kandidaten erfüllt, so daß wir mit beiden die Probe anhand der Ausgangsgleichung machen müssen: Für $x = 3$ ist

$$\sqrt{5x+10} - \sqrt{7-x} = \sqrt{5 \cdot x + 10} - \sqrt{7-3} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3,$$

so daß $x = 3$ tatsächlich eine Lösung ist. Für $x = -2$ aber ist

$$\sqrt{5x+10} - \sqrt{7-x} = \sqrt{5 \cdot (-2) + 10} - \sqrt{7 - (-2)} = \sqrt{0} - \sqrt{9} = -3 \neq 3,$$

so daß $x = -2$ *keine* Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Die Lösungsmenge ist also $L = \{3\}$.

3. a) Es ist

$$x + y = a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$$

sowie

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

b) Da mit a, b, c, d auch $a+b$, $b+d$, $ac+2bd$ und $ad+bc$ in $\mathbb{Q}$ liegen, folgt $x+y, x\cdot y \in K$ aus den Formeln aus Teil a). Wegen $-(a+b\sqrt{2}) = (-a)+(-b)\cdot\sqrt{2}$ und $-a, -b \in \mathbb{Q}$ folgt außerdem $-x \in K$.

4. a) i) Seien $a, b \in K$ mit $0 < a$ und $0 < b$. Aus $0 < a$ folgt wegen $0 < b$ und dem Monotoniegesetz 3.8 iv) bzgl. „$\cdot$", daß $0 \cdot b < a \cdot b$; nun ist (siehe 3.5c) $0 \cdot b = 0$, also gilt

$$0 < a \cdot b. \quad \checkmark$$

ii) Seien $a, b, c, d \in K$ mit $0 < a < c$ (also $0 < a \ \wedge \ a < c$; wegen der Transitivität 3.8 ii) ist dann auch $0 < c$) und $0 < b$ (also $0 < b \ \wedge \ b < d$).
Aus $a < c$ folgt wegen $0 < b$ und dem Monotoniegesetz 3.8 iv) bzgl. „$\cdot$", daß $a \cdot b < c \cdot b$ und
aus $b < d$ folgt wegen $0 < c$ und dem Monotoniegesetz 3.8 iv) bzgl. „$\cdot$", daß $b \cdot c < d \cdot c$.
Also gilt wegen der Transitivität 3.8 ii) und $c \cdot b = b \cdot c$, daß

$$a \cdot b < d \cdot c = c \cdot d. \qquad \checkmark$$

b) Wir wählen für ein Gegenbeispiel $a = -1, c = 1$ und $b = -4, d = 1$. Dann ist

$$a < c \ \wedge \ b < d, \quad \text{aber} \quad a \cdot c = 4 > 1 = c \cdot d.$$